ISSN: 3078-8153（ Print ）
3080-0374（Online）
Education Development Forum *教育发展论坛*
Vol.2, No.6, June 2026

E-mail:HKXDCBS@163.com
http://www.hkxdcbs.com
Tel:0371-63705055

用向量解决平面几何中三点共线问题的策略研究

顾涵

宿迁学院

摘　要：平面几何作为高中数学几何部分中的重要组成部分，重点考查学生的逻辑推理及直观想象能力，解题方法多元化，通常可用解析几何、正弦、余弦定理、向量基底法等方法对题目进行分析。向量作为解决平面几何的重要工具，其中的三点共线定理作为向量的重点部分，在高考中发挥着至关重要的作用。本文主要研究三点共线定理的应用策略。

关键词：平面几何；三点共线定理；向量；高考数学

DOI：10.65976/3080-0374.2026.06.005

在常见的平面几何问题中，多数边长比例类问题均适合使用三点共线定理进行求解，相比于常规的解析几何方法，三点共线定理不必使用两点间距离公式，有效优化了大量计算过程。

三点共线定理 [1]：

若 A，B，C 三点共线⇔存在唯一实数 λ，使得 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$；

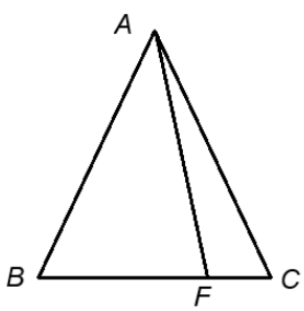
⇔存在唯一实数 λ，使得 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}$；

⇔存在唯一实数 λ，使得 $\overrightarrow{OC}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$；

⇔存在 $\lambda+\mu=1$，使得 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$。

对角线定理 [2]：

在 ΔABC 中，F 为线段 BC 中一点，满足 $BF:FC=m:n$；



结论：$\overrightarrow{AF}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

证明：

$\because \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BF}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

对于三点共线类问题，如果采用向量法进行解决，首先应寻找三组及以上有向线段，且每组线段中须存在三个点，若点与点间线段长度比例关系已知，优先对此三点使用对角线定理，作为已知条件；其次，构造第二组边的比例关系，优先利用已有条件进行构造；最后，利用第三组线段中的三点，使用对角线定理，将构造比例求出即可，代入构造式，结合题目所求，求得最终答案。

例 1·（浙江金华）在 ΔABC 中，点 D 是 BC 的中点，点 E 在线段 AC 上，且 $AE:EC=2:1$，AD 和 BE 相交于点 F，则 $AF:FD$ 的值为____。

解析：

$\because$ D 为 BC 中点，$AE:EC=2:1$

$\therefore \overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

令 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AD}=\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}$

$\because \overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{3\lambda}{4}\overrightarrow{AE}+\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}$

$\because$ E，F，B 三点共线

$\therefore \dfrac{3\lambda}{4}+\dfrac{\lambda}{2}=1$

$\therefore \lambda=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AD}$

$\therefore AF:FD=4:1$

分析：首先确定 AEC、CDB、EFB 三组三点共线，根据题目线段比例关系，运用对角线定理，写出相关

ISSN: 3078-8153（Print）
3080-0374（Online）
Education Development Forum 教育发展论坛
Vol.2, No.6, June 2026

向量间的数量关系，其次构造 AF 与 AD 向量间的数量关系，最后运用 EFB 三点共线，得出相应构造的数量关系，结合题目要求，作出相应解答。

例 2· 在 ΔCOB 中，$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$，$DC$ 和 OA 相交于点 E，若 $\overrightarrow{BO}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，则以 $\{\vec{a},\vec{b}\}$ 为基底表示 $\overrightarrow{BE}$。

解析：

$\because \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$

$\therefore \overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

令$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CD}=\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{CO}+\frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{CB}$

$\because \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CA}$

$\therefore \overrightarrow{CE}=\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{CO}+\frac{4\lambda}{3}\overrightarrow{CA}$

$\because$ E，O，A 三点共线

$\therefore \frac{\lambda}{3}+\frac{4\lambda}{3}=1$

$\therefore \lambda=\frac{3}{5}$

$\therefore \overrightarrow{CE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CO}+\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$

$\because \overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{CE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CO}-\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

$\because \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$

$\therefore \overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CO}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

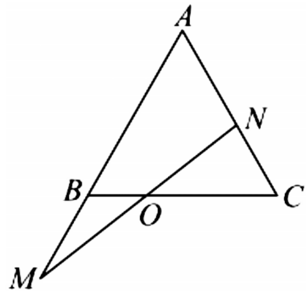
$\because \overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BO}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BE}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

分析：首先确定 BOD、BAC、DEC、AEO，四组三点共线，根据题目线段比例关系，运用对角线定理，写出相关向量间的数量关系，其次构造 CE 与 CD 向量间的数量关系，最后运用 AEO 三点共线，得出相应构造的数量关系，结合题目条件，将其余向量用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示即可。

例 3·（安徽）如图所示，设 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，线段 MN 与 BC 交于点 O，且 $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，则 $2m+n$=_____[3]。



解析：

$\because \overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$\therefore BO:OC=1:2$

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\because \overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{2m}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{n}{3}\overrightarrow{AN}$

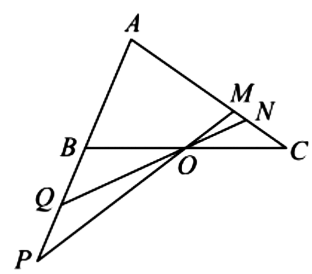
$\because$ MON 三点共线

$\therefore \frac{2m}{3}+\frac{n}{3}=1$

$\therefore 2m+n=3$

分析：首先确定 ABM、ANC、BOC、MON 四组三点共线，根据题目线段比例关系，运用对角线定理，写出相关向量间的数量关系，因为构造关系 m、n 已经给出，不需要额外自己设定，最终运用 MON 三点共线，结合题目条件，列出 m、n 间的数量关系即可。

例 4·（甘肃）如图，在 ΔABC 中，点 O 是 BC 的中点，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{NC}$，分别连接 MO、NO 并延长，与边 AB 的延长线分别交于 P，Q 两点，若 $\overrightarrow{AB}=-2a\overrightarrow{PQ}$，则 a=_____。



解析：

$\because$ O 为 BC 中点

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\because \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{NC}$

$\therefore \overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AN}$

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

ISSN: 3078-8153（ Print ）
3080-0374（Online）
Education Development Forum *教育发展论坛*
Vol.2, No.6, June 2026
E-mail:HKXDCBS@163.com
http://www.hkxdcbs.com
Tel:0371-63705055

$\because$ POM，POM 三点共线

$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$

$\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP},\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore -\frac{1}{2a}=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=1$

分析：首先确定 QON、BOC、POM 三组三点共线，根据题目线段比例关系，运用对角线定理，写出 $\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 向量间的数量关系，逆用对角线定理，确定延长线与线段 AB 的比例关系，最后结合题目条件，写出 a 的系数方程即可。

例 4·（河北石家庄）在 ΔABC 中，点 D 为 AC 边上的中点，点 E 满足 $\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{BE}$，点 P 是直线 BD、AE 的交点，过点 P 做一条直线交线段 AC 于点 M，交线段 BC 于点 N（其中点 M、N 均不与端点重合）设 $\overrightarrow{CM}=m\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CN}=n\overrightarrow{CB}$，则 $\frac{1}{m}+\frac{3}{n}$ 为____。

解析：

$\because$ D 为 AC 中心　$\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{BE}$

$\therefore AD:DC=1:1,BE:EC=1:3$

$\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

令 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}=\frac{3\lambda}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AC}$

$\because \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3\lambda}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AD}$

$\because$ BPD 三点共线

$\therefore \frac{3\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}=1$

$\therefore \lambda=\frac{4}{5}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AE}$

$\therefore AP:PE=4:1$

$\because AP:PE=4:1$, APE 三点共线

$\therefore \overrightarrow{CP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$

$\because \overrightarrow{CE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB}=\frac{1}{n}\overrightarrow{CN}$

$\therefore \overrightarrow{CE}=\frac{3}{4n}\overrightarrow{CN}$

$\because \overrightarrow{CE}=\frac{3}{4n}\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CA}=\frac{1}{m}\overrightarrow{CM}$

$\therefore \overrightarrow{CP}=\frac{3}{5n}\overrightarrow{CN}+\frac{1}{5m}\overrightarrow{CM}$

$\because$ NPM 三点共线

$\therefore \frac{3}{5n}+\frac{1}{5m}=1$

$\therefore \frac{3}{n}+\frac{1}{m}=5$

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{3}{n}=5$

分析：首先确定 APE、BPD、NPM、ADC、BEC 五组三点共线，根据题目线段比例关系，运用对角线定理，写出 $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 向量间的数量关系，其次构造 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 向量间的数量关系，确定二者线段比例关系，并使用 APE 三点共线定理，确定 $\overrightarrow{CP}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CE}$ 数量关系，最后用已给向量进行代换，再次对 NPM，使用三点共线定理，写出 m、n 的代数表达式即可。

四、结语

对于用向量解决平面几何中三点共线问题的策略研究，首先要先观察并寻找 3 组及以上有向线段，且每组线段中必须存在三个已知点，若已知两点间线段比例关系，优先使用对角线定理，其次构造原线段与延长线的长度关系，可将基底进行替换，尽量做到与第三组线段基底一致，结合第三组线段并对其使用共线定理，即可确定长度关系，最后结合题目要求进行求解即可。对于平面几何类问题，要求平时多对图形进行观察，进行额外的规律探索，学会使用多种不同方法解决此类问题。在高考要求中，向量作为解决问题的首选，要优先使用向量求解，平时要多注重此类方法的吸收以及运用。

参考文献：

[1] 王三友 . 三点共线向量结论的应用 [J]. 中学生数学 ,2018(7):6.
[2] 邓超 . 利用三点共线定理中参数的几何意义解题 [J]. 高中数学教与学 ,2024(7):27-28+51.
[3] 王加成 . 关于三点共线向量式的教学与解题探讨 [J]. 数理化解题研究 ,2023(19):21-23.