# 运用函数解决球体的三类问题

顾涵

宿迁学院

**摘　要：**与几何体相关的球体问题通常较为复杂，对学生的空间想象能力和抽象思维能力的要求普遍较高，自新高考改革以来，高考试题更加注重知识的综合性和应用性，球体问题多与常见几何体镶嵌，并注重函数与几何图形的内在联系，使得球体问题成为考查学生相关数学素养的重要体现，本文将从函数角度来解决球体的三类问题。

**关键词：**函数；球体；高考数学

从函数角度进行分析，球体类问题可以大致归为三类问题：定值问题、最值问题、范围问题。

一、球体的定值问题

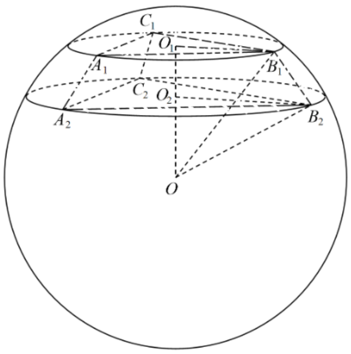
例 1·（2022·新高考Ⅱ卷·7）已知正三棱台的高为 1，上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）[1]

A. 100π　B. 128π　C. 144π　D. 192π

分析：

本题考查球的表面积公式，根据公式 $S=4\pi R^2$ 可得本题最终转化为求解球体半径 $R$，并根据题中已给条件列出相应函数关系式，并计算出相应的 $R$ 即可求解球体的表面积。

解：




如图，令 $\Delta A_1B_1C_1$ 外接圆半径为 $r_1$，重心为 $o_2$，$\Delta A_2B_2C_2$ 的外接圆半径为 $r_2$，重心为 $o_2$，根据正三角形的外接圆半径计算公式可得 $r_1=3$，$r_2=3$，由题得 $o_1o_2=1$，设球心为 $o$，球体半径为 $R$，球心到棱台上下底面距离为 $d_1,d_2$。由图像可知 $d_1=\sqrt{R^2-9}$，$d_2=\sqrt{R^2-16}$。由于球心位置不确定，故分类讨论球心的位置　①点 $o$ 在 $o_1o_2$ 之间　②点 $o$ 在 $o_1o_2$ 的延长线上。

当符合情况①时，可知 $d_1+d_2=1$，令函数 $f(R)=\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}$

当 $f(R)=1$ 时：

$\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}=1$

$R$ 不存在实数解，故舍去

当符合情况②时，可知 $|d_1-d_2|=1$，令函数 $F(R)=|\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}|$，当 $F(R)=1$ 时：

$|\sqrt{R^2-9}+\sqrt{R^2-16}|=1$

$R^2=25$

由于 $R>0$，所以 $R=5$

$S=4\pi R^2=100\pi$，故本题选 A。

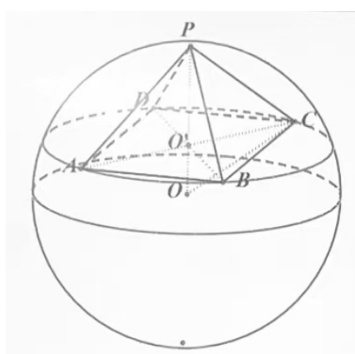
**二、球体的最值问题**

例 2·已知四棱锥的各个顶点都在同一个球面上，若该球的体积为 36π，则该四棱锥体积的最大值是____[2]

分析：

本题考查球的体积公式，根据公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$ 可得球体半径 $R$，并根据题中已给条件列出 $R$ 和相关变量的函数关系式，并根据棱锥体积公式 $V=\dfrac{1}{3}sh$ 即可求出 $V$ 的最值。

解：




法一：

设四棱锥 $P\text{–}ABCD$ 底面四边形 $ABCD$ 的外接圆半径为 $r$，球心 $o$ 到底面的距离为 $h$，球体半径为 $R$。

$\because V=\frac{4}{3}\pi R^3=36$

$\therefore R=3$

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}h$

当 $V_{P-ABCD}$ 取最大值时，$S_{ABCD}$ 与 $h$ 均需取最大值

$\therefore V_{P-ABCD\max}=\frac{1}{3}S_{ABCD\max}h_{\max}$

$h_{\max}=h+R=h+3$

$S_{ABCD}=AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD$

$\because \angle BAD$ 为直径所对应的圆周角

$\therefore \angle BAD=90^{\circ}$

$\therefore S_{ABCD}=AB\cdot AD$

在 Rt$\Delta BAD$ 中：$AB^2+AD^2=(2r)^2=4r^2$

由基本不等式可得 $AB^2+AD^2=4r^2\geqslant 2\cdot AB\cdot AD$(当且仅当 $AB=AD$ 时等号成立)

$(AB\cdot AD)_{\max}=2r^2$

$S_{ABCD\max}=2r^2$

$\therefore V_{P-ABCD\max}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD\max}\cdot h_{\max}=\frac{1}{3}\cdot 2r^2\cdot(h+3)$

令 $AC$，$BD$ 的交点为 $O'$，$AO^2+OO^2=R^2=9$

$\therefore r^2+h^2=9$

$\therefore V_{P-ABCD\max}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD\max}\cdot h_{\max}=\frac{1}{3}\cdot 2(9-h^2)\cdot(h+3)$

令 $V_{P-ABCD\max}=f(h)=\frac{1}{3}\cdot 2(9-h^2)\cdot(h+3)$

$f(h)'=-2(h+3)(h-1)$

当 $f(h)'=0$ 时，$h=1$ 或 $-3$

当 $h\in(0,1)$ 时，$f(h)$ 单调递增，$h\in(1,+\infty)$ 时，$f(h)$ 单调递减

$f(h)_{\max}=f(1)=\frac{64}{3}$

故四棱锥体积的最大值是 $\frac{64}{3}$

法二：

$V_{P-ABCD\max}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD\max}\cdot h_{\max}=\frac{1}{3}\cdot 2(9-h^2)\cdot(h+3)$

对上式进行变形，即

$V_{P-ABCD\max}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(3-h)\cdot(h+3)^2$

$V_{P-ABCD\max}=\frac{(6-2h)\cdot(h+3)^2}{3}$

由均值不等式可得：

若 $a_1,a_2,a_3\cdots a_n$ 均为正数，则：

$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\ldots a_n}$

(当且仅当 $a_1,a_2,a_3\cdots a_n$ 时，等号成立)

借助均值不等式可知

$V_{P-ABCD\max}=\frac{(6-2h)\cdot(h+3)^2}{3}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{(6-2h+h+3+h+3)^3}{3}$

(当且仅当 6−2h=h+2 时等号成立)

$\therefore$ 当 $h=1$ 时，$V_{\text{P-ABCD}}$ 取最大值为 $\frac{64}{3}$

故四棱锥体积的最大值是 $\frac{64}{3}$

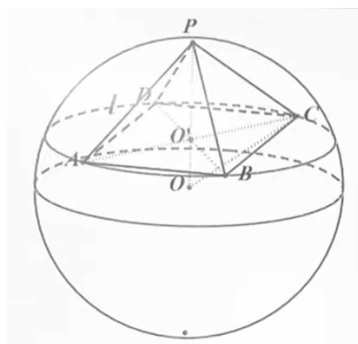
**三、球体的范围问题**

例 3・已知正四棱锥的侧棱长为 $L$，其各顶点都在同一球面上。若该球的体积为 36π，且 $2\leqslant L\leqslant 3$，则该正四棱锥体积的取值范围是____ [3]

分析：

本题考查球的体积公式，根据公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 可求球体半径 $R$，并根据题中已给条件列出 $R$ 与 $L$ 相应函数关系式，并根据棱锥体积公式 $V=\frac{1}{3}sh$ 即可求出 $V$ 的取值范围。

解：




设四棱锥 $P-ABCD$，其底面对角线的交点为 $o'$，球体半径为 $R$，球心为 $o$。

$\because V'=\frac{4}{3}\pi\tau R^3=36\pi$

$\therefore R=3$

设 $PO'=x$

在 $Rt\Delta OO'C$ 中：$(O'C)^2=(OC)^2-(OO')^2$

$O'C=\sqrt{6x-x^2}$

在 $Rt\Delta PO'C$ 中 :$(PC)^2=(PO')^2+(O'C)^2$

$L^2=x^2+(\sqrt{6x-x^2})^2$

$6x=L^2\in[4,9]$

$\therefore x\in[\frac{2}{3},\frac{3}{2}]$

$S_{ABCD}=2\cdot(O'C)^2=2(6x-x^2)$

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot PO'$

$\therefore V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 2(6x-x^2)\cdot x$

令 $f(x)=V_{P\text{-}ABCD}=\frac{2}{3}\cdot(6x^2-x^3)$

$f(x)'=8x-2x^2$

当 $f(x)'=0$ 时，$x=0$ 或 4

当 $x\in(0,4)$ 时，$f(x)$ 单调递增，$h\in(4,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减

$\because x\in[\frac{2}{3},\frac{3}{2}]$

$\therefore f(x)\in[f(\frac{2}{3}),f(\frac{3}{2})]$

$\therefore V_{P\text{-}ABCD}\in[\frac{128}{81},\frac{27}{4}]$

故该正四棱锥体积的取值范围是 $[\frac{128}{81},\frac{27}{4}]$。

## 四、结语

从函数角度解决球体问题，有利于培养学生的空间想象，逻辑推理，计算能力等核心素养。无论是其中任何一类问题，在分析过程中，首先要根据题给信息，进行数学建模，构造出符合题意的三维图像，在此过程中要注意图像的非一意性，若有多种情况则需依次画出相应图形。其次，我们要从多元平面梳理几何关系，并通过几何关系构造出相关函数，几何关系通常存在于特殊图形中，如直角三角形或矩形，不同的几何图像会呈现不同的几何关系，需要学生在日常学习中深入探索图形间的密切联系。最后，对相关函数表达式进行简化处理，使其成为较为简便的函数式，同时根据题目要求选择最简便的方法求取相关答案。

**参考文献：**

[1] 侯丽莎 . 高考数学对球体考查的新动向 [J]. 中学数学 ,2022(21):42−43.

[2] 雷誉 . 直观想象素养下的球体切接问题 [J]. 高中数理化 ,2023(23):47−49.

[3] 袁安 . 空间几何体外接、内切球问题解法荟萃 [J]. 高中数理化 ,2023(Z1):106−111.