线性空间补子空间和欧氏空间正交补的唯一性研究

张伟聪

海南工商职业学院

摘　要：直和在线性空间和欧氏空间中是很重要的一个概念，由线性空间和欧氏空间中的直和分别引出的补子空间和正交补，本文研究补子空间和正交补空间的唯一性问题，得出了补子空间的不唯一性和正交补的唯一性。

关键词：线性空间；欧氏空间；补子空间；正交补

线性空间与欧氏空间是现代数学中不可或缺的重要概念，其理论研究在信号处理、图像识别以及量子计算等领域具有广泛的应用。在线性空间的分析中，子空间的分解及其补子空间的性质研究尤为关键。其中，补子空间与正交补空间的唯一性问题不仅在理论上具有重要意义，同时也为应用中的向量空间分解提供了理论基础。

近年来，国内外学者针对线性空间与欧氏空间中子空间的结构特性进行了深入研究。王丽莎等人(2024) 在研究线性方程组方法时，通过齐次线性方程组解空间与系数矩阵行空间的正交性，揭示了子空间与其正交补之间的深刻联系。史江涛等人（2024）探讨了线性空间中子空间的并集问题，并通过群论的方法给出了线性空间中子空间分解的充分必要条件，该研究为子空间分解的多样性提供了新的视角。任芳国等人（2024）在矩阵多项式的研究中，深入刻画了矩阵的 Jordan 标准形，通过矩阵相似关系与秩的分析进一步揭示了子空间在矩阵分解中的关键作用。

现有研究成果表明，在有限维线性空间中，补子空间通常是不唯一的，而正交补空间则具有唯一性。这种区别源于正交补空间由内积所决定，其唯一性可以通过正交基的扩展来证明。然而，对于补子空间的不唯一性，如何在不同维度的线性空间中进行合理的补子空间构造，仍然是一个值得深入探讨的问题。

本文结合前人研究，针对有限维线性空间与欧氏空间中补子空间与正交补空间的唯一性问题，分别从非平凡子空间与平凡子空间的角度进行讨论与证明。通过分析这些子空间的性质，进一步揭示其在空间分解中的作用与意义，并为后续的理论研究与实际应用提供参考。

1　线性空间的补子空间

子空间分为平凡子空间和非平凡子空间，为此，对线性空间中子空间的补子空间的研究可进行分类讨论，即分别对平凡子空间和非平凡子空间的补子空间讨论。

1.1　非平凡子空间的补子空间

命题：设 V_1 是 n 维线性空间 V 的一个非平凡的子空间，那么 V_1 在 V 中的补子空间的不唯一。

证明：设 V_1 的一组基为：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m$，把它扩充为 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_n$。

接着说明 $V=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m)+L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$ 和 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m)+L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$ 是直和。

因为 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m)$ 中的向量也是 V 的向量，$L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$ 中的向量也是 V 的向量，因此 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m)+L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$ 也是 V 的向量，又因为 V 中的每一个向量都能由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出，从而有 $V=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m)+L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$。

再由线性空间 V 的维数等于 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m)$ 的维数与 $L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$ 维数之和，综上得出 $L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$ 是 V_1 在 V 中的一个补子空间。

我们令 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots\cdots+k_m\varepsilon_m+k_{m+1}(\varepsilon_1+\varepsilon_{m+1})+\cdots\cdots+k_n\varepsilon_n=0$，从而有 $(k_1+k_{m+1})\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots\cdots+k_n\varepsilon_n=0$，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，所以 $k_1+k_{m+1}=k_2=\cdots\cdots=k_n=0$，从而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_1+\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关。

故有 $L(\varepsilon_1+\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$ 也是 V_1 在 V 中的一个补子空间。

由于向量组 $\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n$ 与向量组 $\varepsilon_1+\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n$ 不能相互线性表出。

所以 $L(\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)\neq L(\varepsilon_1+\varepsilon_{m+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$，$V_1$ 在 V 中的补子空间不唯一。

1.2　平凡子空间的补子空间

推论 1[1]：设 V 为 n 维线性空间，V_1 为 V 的非零子空间，如果存在唯一的子空间 V_2 使 $V=V_1\oplus V_2$，则 $V_1=V$。

证明：方法一：若 $V_1\neq V$，设 $\dim V_1=m$，$\dim V=n$，则 $0<\dim V_1=m<n=\dim V$。

我们取 V_1 的一组基为：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_m$，把它扩充为 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$。

则 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_m)$，令 $V_2=L(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots\cdots,\alpha_n)$，从而有 $V=V_1\oplus V_2$。

我们再设 $V_3=L(\alpha_1+\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots\cdots,\alpha_n)$ 有（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_m$，$\alpha_1+\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots\cdots,\alpha_n$）=（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$）A（其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$）

因为 $|A|\neq 0$，有向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_m,\alpha_1+\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

可得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_m,\alpha_1+\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots\cdots,\alpha_n$ 也是 V 的一组基，故 $V=V_1\oplus V_3$。

下面我们证明 $V_2\neq V_3$。

我们采用反证法，如果 $V_2=V_3$，则有 $\alpha_{m+1}\in V_2$，$\alpha_1+\alpha_{m+1}\in V_2$。

所以 $\alpha_1\in V_2$。又因 $\alpha_1\in V_1$，从而有 $\alpha_1\in V_1\cap V_2$。

由于 $V=V_1\oplus V_2$，故有 $\alpha_1=0$ 与 $\alpha_1\neq 0$ 矛盾。

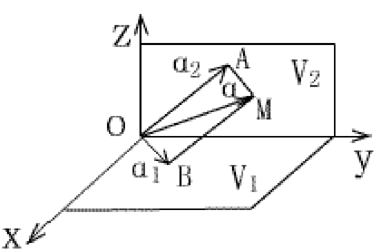
所以假设不成立，从而有 $V_1=V$。

方法二：我们反设 $V_1\neq V$。

因 V_1 是 V 的真子空间，即 $V_1\subseteq V$.

又因为非平凡子空间的补子空间不唯一，知道 V_1 的补子空间不唯一，换句话说，V_1 至少有两个不同的补子空间。而又由题干的已知条件：V_1 有唯一的子空间 V_2。从而产生矛盾。所以 $V_1=V$。

1.3　例子



例：取三维空间中两个坐标平面：V_1 为平面 xoy，V_2 为平面 yoz。则对 $\forall\alpha\in R^3$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$，这种分解不唯一，如图从几何上可看出，过 α 终点作直线 MA 与 V_1 平行交 V_2 于 A。过 O 作 AM 的平行线 OB，作出□ MAOB，则 $OB=\alpha_1\in V_1$，$OA=\alpha_2\in V_2$。又从代数上，若 $\alpha=(1,2,3)$. 则 $\alpha=(1,2,0)+(0,0,3)$。

又 $\alpha=(1,1,0)+(0,1,3)$。因此 V_1+V_2 是和而不是直和。

例：设 U 是线性空间 V 的一个真子空间，问 V 中 U 的补子空间 W 是否唯一？

答：不唯一。

例如：$V=R^2$，$U=L(\varepsilon_1)$，其中 $\varepsilon_1=(1,0)$。再令 $\varepsilon_2=(0,1)$，$\alpha=(1,1)$，

那么 $W_1=L(\varepsilon_2)$，$W_2=L(\alpha)$ 有 $V=U+W_1=U+W_2$，对 $\forall\alpha\in U\cap W_1\Rightarrow\alpha\in U$，$\alpha\in W_1$。

$$\begin{cases}\alpha=k\varepsilon_1=(k,0)\\\alpha=l\varepsilon_2=(0,l)\end{cases}\Rightarrow k=l=0$$

故有

$$U\cap W_1=\{0\}$$

$$V=U\oplus W_2$$

所以 $\alpha=(0,0)$ 即有 $U\cap W_1=\{0\}$。

所以 $V=U\oplus W_1$。同理 $V=U\oplus W_2$。又 $W_1\neq W_2$。所以 V 中 U 的补子空间不唯一。

2　欧氏空间的正交补空间

我们仍将问题分为非平凡子空间和平凡子空间的正交补来讨论。

2.1　非平凡子空间的正交补

命题：欧氏空间 V 的每个非平凡子空间 V_1 都有唯一的正交补，即 V_2，V_3 都是 V_1 的正交补，$V=V_1\oplus V_2$，$V=V_1\oplus V_3$，则有 $V_2=V_3$。

证明：存在性：设 $\dim V_1=s$，$0<s<n$，这是取 V_1 的一组正交基为：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_s$，把它扩充为 V 的一组正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_n$，则 $V_1=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_s)$，可证 $V_1^{\perp}=L(\varepsilon_s+_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n)$。

事实上，对任意 $\alpha\in L(\varepsilon_{s+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)$，有 $\alpha=l_{s+1}\varepsilon_{s+1},\cdots\cdots,l_n\varepsilon_n$，且任意 $\beta\in V_1$，有 $\beta=l_1\varepsilon_1+l_2\varepsilon_2,\cdots\cdots,l_s\varepsilon_s$，则有 $(\alpha,\beta)=(l_{s+1}\varepsilon_{s+1},\cdots\cdots,l_n\varepsilon_n,l_1\varepsilon_1+l_2\varepsilon_2,\cdots\cdots,l_s\varepsilon_s)=\sum_{i=s+1}^{n}\sum_{j=1}^{s}l_il_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$，

所以 $\alpha\in V_1^{\perp}$，此即 $L(\varepsilon_{s+1},\cdots\cdots,\varepsilon_n)\subseteq V_1^{\perp}$。

下面证明：$L(\varepsilon_s+_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n)\supseteq V_1^{\perp}$。

$\forall\delta\in V_1^{\perp}$，有 $\delta=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_s\varepsilon_s+k_{s+1}\varepsilon_{s+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n$。

对 $\varepsilon_i\in V$（i=1,2,……,s），有 $0=(\varepsilon_i,\delta)=k_i(\varepsilon_i,\varepsilon_i)$，所以 $k_i=0$（i=1,2,……,s）

则有 $\delta=k_{s+1}\varepsilon_{s+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n\subseteq L(\varepsilon_s+_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n)$，所以 $V_1^{\perp}\subseteq L(\varepsilon_s+_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n)$。

综上得到 $V_1^{\perp}=L(\varepsilon_s+_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n)$。

唯一性：设 V_2,V_3 都是 V_1 的正交补，于是有 $V=V_1\oplus V_2$，$V=V_1\oplus V_3$，

令 $\alpha\in V_2$。由 $V=V_1\oplus V_3$ 有：$\alpha=\alpha_1+\alpha_3$，其中 $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_3\in V_3$，

又 $\alpha\perp\alpha_1$，所以 $(\alpha,\alpha_1)=(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_1)+(\alpha_3,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=0$，有 $\alpha_1=0$。

则 $\alpha\in V_3$，即有 $V_2\subseteq V_3$。同理可得 $V_3\subseteq V_2$，综上得到 $V_3=V_2$。

2.2 平凡子空间的正交补

设 V_1 是有限维欧氏空间 V 的子空间，如果 $V_1=\{0\}$，则它的正交补就是 V；如果 $V_1=V$，那么它的正交补就是 $\{0\}$。

我们可以得到下面的命题：

命题：设 V_1 是欧氏空间 V 的一个有限维子空间，则 $V=V_1 \oplus V_1^{\perp}$。

命题：设 V_1 是欧氏空间 V 的一个有限维子空间，则 V_1 的正交补（即 $V_1^{\perp}$）由 V_1 来唯一决定。

2.3 例子

例：在几何空间 V 中，设 V_1 是过原点的一条直线，则 $V_1^{\perp}$ 是过原点且与直线 V_1 垂直的平面。我们显然可以得到：$V=V_1 \oplus V_1^{\perp}$。

由 $\forall \alpha \in V$，有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_2 \in V_1^{\perp}$。

下证唯一性，我们不妨设 α 还可表示为：$\alpha=\beta_1+\beta_2$，$\beta_1 \in V_1$，$\beta_2 \in V_1^{\perp}$。

则有 $\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$。所以 $\alpha_1-\beta_1=\beta_2-\alpha_2$，又 $\alpha_1-\beta_1 \in V_1$，$\beta_2-\alpha_2 \in V_1^{\perp}$，$V_1^{\perp} \cap V_1=\{0\}$。所以 $\alpha_1-\beta_1=0$，$\beta_2-\alpha_2=0$，即有 $\alpha_1=\beta_1$，$\beta_2=\alpha_2$。

3 总结

本文得出了，直和在有限维线性空间和欧氏空间中的区别，即：在线性空间中，任意一子空间都存在不唯一的补子空间，如果子空间的补子空间唯一当且仅当该子空间等于原线性空间(若子空间等于零空间，则其补子空间等于原线性空间，由对称性，我们可重新构造新的子空间与补子空间，使得子空间等于原线性空间）。在有限维欧氏空间 V 中，任意一子空间 V_1 都有唯一的正交补 $V_1^{\perp}$，即：$V=V_1 \oplus V_1^{\perp}$。

简而言之，在有限维线性空间和欧氏空间中，补子空间不唯一，正交补唯一。补子空间唯一当且仅当子空间为平凡子空间。

参考文献：

[1] 王丽莎，陈媛，徐运阁．线性代数中的线性方程组方法 [J]. 高等数学研究，2024,27(01):62−65+84.

[2] 史江涛，王燕．关于线性子空间的并集的一个注记 [J]. 高等数学研究，2024,27(01):1−2+15.

[3] 任芳国，王甜甜．关于矩阵多项式 Jordan 标准形刻画 [J]. 高等数学研究，2024,27(01):18−21+117.

[4] 钱吉林．高等代数题解精粹 [M]. 北京：中央民族大学出版社，2009.

[5] 丘维声．高等代数（第二版）下册 [M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[6] 杨子胥．高等代数精选题解 [M]. 北京：高等教育出版社，2009.

[7] 张力宏，刘鹏飞．欧氏空间子空间正交补的代数方法研究 [J]. 大学数学，2009,25(03):190−192.