

数学史视角下等比数列的前 n 项和公式的教学

杜保营 覃淋

宜宾学院 数理学院 四川 宜宾 644000

摘 要：基于数学史的视角，设计等比数列的前 n 项和公式的教学。运用多种方式将数学史融入课堂教学。通过对历史上不同文明对等比数列的前 n 项和公式的不同推导方式的介绍，拓宽学生的视野，渗透数学文化，培养学生的核心素养，为学生营造了不一样的数学课堂，落实立德树人根本任务。

关键词：数学史；等比数列；前 n 项和；教学

一、引言

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称《课程标准》）在“教学建议”中明确指出，教师在发展学生数学学科核心素养过程中，要有意识地结合相应的数学教学内容，在日常教学中渗透数学文化，在教学活动中注意揭示数学的发生、发展和完善的过程^[1]。美国著名数学史家 M·克莱因（Morris Kline，1908—1992）认为：“从历史上看，任何一门学科最初都是从直观的方法建立起来的，大数学家都是直观地思考问题，再用演绎的形式将知识系统化”。美国数学史家卡约里（F. Cajori，1859—1930）在《A History of Mathematics》（1926）的前言中写道：“如果用历史轶事点缀枯燥的计算和证明，学生的兴趣就会大大增加。……通过对数学历史的介绍，能够让学生明白：数学并不是一门呆板乏味的学科，而是一门不断进步且生动有趣的学科。”^[3]国际上著名数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal，1905—1990）更是明确指出：“数学史乃是一个不断进步的系统化的学习过程。儿童无需重蹈人类的历史，但他们也不可能从前人止步的地方开始。从某种意义上说，儿童应该重蹈历史，尽管不是实际发生的历史，而是倘若我们的祖先已经知道我们今天有幸知道的东西，将会发生的历史。”^[4]

数学史揭示了数学概念、数学符号、数学术语、数学定理、数学公式等的起源和演变过程，将处于科学形态的数学知识变为教学形态的知识，把数学家创造数学的“火热的思考”的过程展现出来。在教学过程中融入数学史，一方面可以让学生感受丰富多彩的数学文化，激发数学学习的兴趣；另一方面有助于学生对数学概念和数学思想方法的理解。数学史作为数

学教学的重要资源，它的重要教育价值与文化价值得到了理论与实践两个层面的普遍认同。数学史融入课堂教学实践表明，数学史具有知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效等多元的教育价值和文化价值。

《课程标准》在“教材编写建议”中指出：教材的编写要“体现数学内容的逻辑体系，揭示数学内容的发生、发展过程；要遵从学生认知规律……”^[1]通过对在职数学教师的调查发现，大部分老师都非常认同数学史的教育价值，但是在教学中却很少使用数学史，重要原因之一就是没有可供使用的数学史料，数学史在教学中“高评价、低应用”的现象普遍存在^[5]。

“等比数列的前 n 项和公式”是人教 A 版高中数学选择性必修 2《数列》4.3 节的内容，是“等比数列”内容的延续。《课程标准》中要求学生“探索并掌握等比数列的前 n 项和公式，理解等比数列的通项公式与前 n 项和公式的关系^[1]。”教材在引入这一内容时以历史传说——国际象棋的发明为例，创设情景，作为引入。这里的内容承上启下，既是对上一节课“等比数列”内容的复习，又进一步提出了新问题，再引入求一般的等比数列的和，体现了从特殊到一般的数学思想。这样处理的优点是运用故事激发学生的学习动机，可以激发学生的学习兴趣。但创设的情境以及提出的问题对公式的推导过程没有起到作用。尤其是公式推导过程中两边同时乘以 q 这一关键步骤没有作好铺垫，许多学生难以接受。

通过考察等比数列求和公式的历史，发现早在 3000 年前的古埃及、古巴比伦就已经有等比数列求和的问题了。但他们不知道欧拉的“错位相减法”，那他们又是如何解决这一类问题的呢？实际上，对于等

作者简介：杜保营，生于 1981 年，男，博士，讲师，研究方向为偏微分方程，数学教育。

覃淋，生于 1991 年，男，硕士，助教，研究方向为数学史与数学教育。

比数列的前 n 项和公式的推导,历史上还有很多不同的推导方法。古代埃及、两河流域、中国、印度、希腊、伊斯兰以及欧洲中世纪的许多数学文献中都有很多等比数列求和的问题。本文通过选取历史上的素材,设计一系列问题,将数学史上等比数列的前 n 项和公式的多种推导方法融入教学,让学生了解数学知识的发生发展的历程,帮助学生理解等比数列的前 n 项和公式,营造人性化的课堂,在潜移默化中实施数学学科德育,落实立德树人的根本任务。

二、历史材料梳理

早在古巴比伦时期,就已有等比数列求和问题。古巴比伦泥板 MS1844 (约公元前 2050 年)上记载如下的问题^[3]:七兄弟分财产,最小的得 2,后一个比前一个多得 $\frac{7}{6}$,问所分财产共有多少?这个问题中七兄弟各人所得财产构成一个首项为 2、公比为 $\frac{7}{6}$ 、项数为 7 的等比数列。在泥版最上方,祭司给出了数列的和。

古埃及人很早就讨论过等比数列求和问题,莱英德纸草书上记载了许多数学问题,书中的问题 79 就是一个等比数列求和的问题:一座庄园里有 7 幢房子;每幢房子里有 7 只猫;每只猫要吃 7 只老鼠;每只老鼠要吃 7 颗麦穗;每颗麦穗能产生 7 赫卡特(古埃及计量单位)粮食。问庄园里共有多少东西?^[6]这一问题后来又有许多变式,如“士兵问题”:一座房子有 14 个房间,每个房间有 14 张床,每张床上躺着 14 个士兵,每个士兵有 14 支枪,每支枪里有 14 颗子弹。问共有多少?

根据古埃及人的计算方法,可以推测古埃及人已知一般等比数列的前 n 项和与前 $n-1$ 项和之间的关系,即 $S_n = a_1 + qS_{n-1}$ 。

由此易得 $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} (q \neq 1)$ 。

欧几里得在《几何原本》第 9 卷命题 35 给出了等比数列的前 n 项和公式的另一种推导方法^[7]:假设 $\{a_n\}$ 为等比数列,各项分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$, 公比为 $q (q \neq 1)$, 根据等比数列的定义,有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_2}{a_1} = q$, 得到 $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_3 - a_2}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = q - 1$, 利用等比定理,有:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{S_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = q - 1$$

整理,得 $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} (q \neq 1)$ 。

中国古代许多数学文献中也有等比数列的求和问题,《九章算术》“衰分”章问题 2:“今有牛、马、羊食人苗,苗主责之粟五斗。羊主曰:‘我羊食半马’,马主曰:‘我马食半牛’。今欲衰偿之,问各出几何?”《张丘建算经》(约公元 5 世纪):“今有马行转迟,次日减半疾,七日行七百里。问日行几何?”元代数学家朱世杰的《算学启蒙》(1299):

“今有银一秤一斤十两,令甲、乙、丙从上折半差分之,问各得几何?”明代数学家程大位的《算法统宗》(1593)中有许多以诗歌形式来表达的等比数列求和问题,如浮屠增级歌^[8]:远望巍巍塔七层,红灯点点倍加增。共灯三百八十一,请问尖头灯几盏?这是一个已知项数、前 7 项和、公比,求首项的问题。书中也没有给出等比数列求和公式,而是运用比例方法来求解。如上题,从塔尖往下,各层的灯的数量构成比例 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64, 可求得各层灯的数量依次为 $\frac{1 \times 381}{127}, \frac{2 \times 381}{127}, \frac{4 \times 381}{127}, \frac{8 \times 381}{127}, \frac{16 \times 381}{127}, \frac{32 \times 381}{127}, \frac{64 \times 381}{127}$, 这里 $1+2+4+8+16+32+64=127$ 。整理即可得到各层灯的数量分别为 3、6、12、24、48、96、192。这些问题都可以设置为例题或习题,再让学生用等比数列的前 n 项和公式来解答,让学生体会古今数学方法的异同。

印度的等比数列求和问题最先出现于吠陀梵文文献中,印度数学家给出了等比数列的求和公式,但目前还不清楚他们是如何得到公式的。摩诃毗罗在《计算方法纲要》给出了公式 $S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} (q \neq 1)$ ^[9], 摩诃毗罗的《计算方法纲要》中有如下问题:某人某天在某地得金币 2 个,以后每天另到一地,所得金币数是上一地的 3 倍,问 8 天共得几何?

《莉拉沃蒂》中有许多类似问题,如^[10]:某人第一天施僧 2 子安贝(古印度货币单位),以后每天增加 2 倍,问一月共施几何?

英国数学家阿尔昆(Alcuin, 735-804)的《敏锐青年之命题》有如下等比数列求和问题:某国王征兵,规定第一个村子征兵 1 人,第二个村子征兵 2 人,第三个村子征兵 4 人,第四个村子征兵 8 人,以此类推,直到第三十个村子,问:一共征兵多少人?

伊斯兰著名数学家阿尔·比鲁尼(Al-Biruni, 973-1055)的著作中有著名的棋盘问题。这就是人教 A 版教材中给出的象棋问题,后来欧洲许多初等数学

著作中都载有这一问题或者其变式。比如帕乔里(Luca Pacioli, 1445—1517)的《概要》、卡尔达诺(Gerolamo Cardano, 1501—1576)《实用算术》、克拉维斯(Clavius, 1538—1612)《实用算术概要》等。

伊本·艾兹拉(Rabbi ibn Ezra, 1090—1167)在《数之书》中给出公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1)$, 但并未给出证明^[11]。伊斯兰数学家阿尔·卡西(Jamshid al-Kashi, 1380—1429)在《算术之钥》给出等比数列的前n项和公式 $a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^n - a}{a - 1} + a^n (a \neq 1)$, 也没有对公式进行证明。

斐波拉契的《计算之书》中载有许多等比数列求和的问题, 如前面提到的“7个老翁去罗马”的问题。

意大利数学家贝尔达曼迪(Beldamandi, 1370—1428)在《整数算法》(1410)中给出公式 $S_n = a_n + \frac{a_n - a_1}{q - 1}$ 。法国数学家许凯(Nicolas Chuquet, 1431—1515)在《算学三部》(1484)中给出公式 $S_n = \frac{qa_n - a_1}{q - 1}$ 。斯蒂菲尔(Michael Stifel, 1487—1567)在《整数算术》(1544)中给出了形如 $S_n = \frac{(qa_n - a_1)a_1}{a_1q - a_1}$ 的求和公式, 塔尔塔利亚(Niccolo Tartaglia, 1499—1557)在《数量通论》(1556)给出了上述公式。德国数学家克拉维斯在《实用算术概要》

中给出了等比数列前n项和公式 $S_n = \frac{a_n - a_1}{q - 1} + a_n$ 。但这些著作都是以文字语言来表述的, 如《实用算术概要》中: 末项减去首项, 所得的差除以公比与1的差, 得到的商再来加上末项^[12]。

直到17世纪, 英国数学家沃利斯(J. Wallis, 1616—1703)在其著作《统一的数学》(1695)采用了符号语言表示^[13]。但他们都没有对公式进行推导。

18世纪, 瑞士大数学家欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)在《代数学基础》(1774)中给出了今天高中数学教材中普遍采用的错位相减法。但欧拉并不是直接推导出公式, 而是通过观察一系列特殊的等比数列: $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n, 1, 3, 3^2, \cdots, 3^n$, 最后通过类比归纳的方式得到 $a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}$ 的和^[14]。

19世纪初, 法国数学家拉克罗瓦(S. F. Lacroix, 1765—1843)在其著作《代数学基础》(1804)中给出一种推导方法——“掐头去尾法”: 由 $S_n - a_1 =$

$a_2 + a_3 + \cdots + a_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1})$; 另一方面, $S_n - a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$, 所以 $S_n - a_n = q(S_n - a_n)$, 由此可得等比数列求和公式^[15]。

19世纪, 英国数学家华里司(W. Wallace, 1768—1843)在《大英百科全书》中的词条中沿用了欧拉的推导方法^[16]。

三、教学实施

(一) 呈现问题

首先引导学生复习前面学习的等差数列的定义、通项公式、前n项和公式与等比数列的通项公式等内容。然后给出亚当斯《学者算术》中的妻子问题: 我赴圣地伊夫斯, 路遇一男携七妻, 一妻各自负七袋, 每袋都装七猫咪, 猫咪又把七仔生, 同去圣地共几何?

对于这个问题, 学生很容易想到把每项算出来, 再相加。接着教师用PPT呈现“棋盘问题”, 再向学生提问: “如何计算棋盘上的麦粒总数?”

在学生交流讨论的同时, 教师播放制作的微视频介绍等比数列求和问题的历史以及历史上一些著名的等比数列求和问题。

(二) 合作探究

教师通过课前制作的微视频, 大致介绍等比数列求和公式推导的可能思路。再引导学生分小组进行探究。小组讨论后, 请各组代表分别上台展示。

小组一: 古埃及人的方法之一

由等比数列的定义, 找到前n项与前n-1项的关系, 得到二者的等量关系, 学生思路如下:

由于 $S_n = a_1 + qS_{n-1} = a_1 + q(S_n - a_n) = a_1 + q(S_n - a_1q^{n-1})$, 整理得到 $S_n - qS_{n-1} = a_1 - a_nq$, 所以 $S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1 - q} (q \neq 1)$ 。

小组二: 古埃及人的方法之二

由等比数列的定义, 找到前n+1项与前n项的关系, 得到二者的等量关系, 学生思路如下:

由于 $S_{n+1} = a_1 + qS_n$, 另外 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, 就有 $S_n + a_{n+1} = a_1 + qS_n$, 所以 $S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}q}{1 - q} (q \neq 1)$ 。

小组三: 错位相减法

利用错位相减法推导出公式, 先举了几个具体实例, 然后得出结论。学生的思路如下:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1}$$

两式相减得 $(q-1)S_n = a_1q^n - a_1$, 从而当 $q \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1}。$$

小组四: 等比定理法之一

根据等比数列的定义,利用比例的合比性质与等比性质推导出求和公式,学生思路如下:

$$\text{因为: } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

得到:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_3 - a_2}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

$$\text{从而有: } \frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{S_n} =$$

$$\frac{a_3 - a_2}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = q - 1$$

$$\text{整理,得: } S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} (q \neq 1)。$$

小组五:等比定理法之二

根据等比数列的定义,利用等比定理推导出公式,学生思路如下:

$$\text{由 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q$$

$$\text{根据等比定理有: } \frac{a_{n+1} + a_n + \dots + a_2}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1} = q$$

$$\text{即 } \frac{a_{n+1} + S_n - a_1}{S_n} = q$$

$$\text{整理得到 } S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} (q \neq 1)。$$

小组六:掐头去尾法

对 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ 进行“掐头”,得到 $S_n - a_1 = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$; 再进行“去尾”,得到 $S_n - a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$, 学生的推导思路如下: 由于 $S_n - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})$; 另一方面, $S_n - a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$, 所以 $S_n - a_1 = q(S_n - a_n)$, 得到

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} (q \neq 1)。$$

小组七:提取首项法

根据等比数列的定义,首先对 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$ 进行变形,得到 $S_n = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1})$; 再由公式 $(1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = 1 - q^n$ 即可得到公式,学生的推导思路如下: 因为 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1})$, 从而 $(1 - q)S_n = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1})(1 - q) = a_1(1 - q^n)$, 整理得到公式 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} (q \neq 1)。$

小组八:等比定理法之三

根据等比数列的定义,利用等比定理推导出公式,

学生思路如下:

$$\text{由 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q$$

$$\text{根据等比定理有 } \frac{a_n + a_{n-1} + \dots + a_2}{a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1} = q$$

$$\text{即 } \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n} = q$$

$$\text{整理得到: } S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} (q \neq 1)$$

小组九:恒等式法

$$\text{根据恒等式: } 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

因为 $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$, 将恒等式代入即可得到公式。

(三) 总结规律

教师对各小组的方法进行总结,并作相应完善。小组一利用了古埃及人的思路,小组二的方法对小组一进行了改进,小组七的方法可称为“提取公因式”法,是在古埃及人方法的基础上得到的。小组三的方法是欧拉在《代数学基础》中给出的错位相减法,学生的思路和欧拉的思路很相似,都是通过特殊到一般的思路。小组四的方法是欧几里得在《几何原本》中给出的方法,小组五的方法是对小组四进行了改进,推导过程更加简洁。小组六的方法是法国数学家拉克罗瓦在《代数学基础》中给出的推导方法。从小组十的方法可以清楚看到“掐头去尾法”是来源于《几何原本》的。小组九用的恒等式法和小组七的方法类似,但推导过程更简洁。

(四) 应用规律

在推导公式后,让学生运用公式解决棋盘麦粒问题,和前面呼应。

$$S_{64} = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} = \frac{1 \times (1 - 2^{64})}{1 - 2} = 2^{64} - 1$$

随后,要求学生利用求和公式解决一些问题,体会数学的实用性。

问题1 远望巍巍塔七层,红灯点点倍加增。共灯三百八十一,请问尖头灯几盏?(程大位《算法统宗》)

问题2 今有女善织,日自倍,五日织五尺。问日织几何?(《九章算术》)

问题3 七兄弟分财产,最小的得2,后一个比前一个多 $\frac{1}{6}$,问所分财产共有多少?

(五) 课堂总结

本节课学习了等比数列的前n项和公式,从古巴

比伦泥版上的分财产问题,经历了古埃及人、《几何原本》、印度数学家、中世纪欧洲数学家,再到欧拉《代数学基础》中的错位相减法,介绍了历史上等比数列的求和公式的不同的精彩证明方法。在本节课中学习了多种数学思想方法:特殊到一般的思想、方程思想、数学结合的思想、分类讨论的思想,培养了学生的数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理以及数学建模等数学核心素养。

四、结语

本节课主要采用了复制式、顺应式的方式来将数学史融入课堂教学中。首先是复制式,利用了古代许多数学著作中的“历史数学名题”,比如“分财产”问题、“猫鼠”问题等,都属于复制数学问题。在公式的推导过程中,古埃及人的方法、《几何原本》中的方法、法国数学家拉克罗瓦的方法、欧拉的错位相减法,都是复制历史上的数学思想方法。其次是顺应式,在公式推导过程中,对古埃及人的方法进行改进,使得公式的推导更为简单,更加适合学生的学习,符合学生的数学认知结构,但所蕴含的数学思想方法没有改变。实际上,除了《几何原本》中的推导方法外,其它方法都蕴含着方程思想,在公式的推导的过程中,潜移默化地渗透了数学思想方法。

教材中介绍的“错位相减法”具有较强的技巧性,如无教师引导,学生很难想到。对学生而言,这样的知识是不“自然”的。基于数学史的视角,设计课堂教学,从学生已有数学知识结构出发,创设问题情境,引起认知冲突,激发学习动机,使得公式的产生变得自然,揭示了数学知识之谐;通过古今方法的比较,呈现了数学方法之美;将历史与现实相联系,同时为学生提供了探究的机会,让学生体验了探究之乐;以故事的形式让学生用所学知识解决问题,培养了学生解决问题的能力,达成了能力之助;通过对不同文明中等比数列求和问题的介绍,凸显人文元素,将历史与现实、数学与人文、数学与科学联系起来,通过历史把数学的“学术形态”转化为“教育形态”,降低了学生数学学习的外在认知负荷;同时拓宽了学生的视野,既培养了学生的多元文化视角,又渗透了数学文化,展示了数学文化的魅力。通过等比数列求和公式不同时期的不同推导方法的介绍,让学生明白数学是不同时期数学家共同努力的智慧成果,培养学生独立思考、敢于质疑、追求创新的理性精神,达成了德育之效。本节课利用数学史在历史与现实、数学与人文、

数学与科学之间架起了三座桥梁,恢复了数学公式背后的人文精神,彰显了数学背后的人性,有助于提升学生对数学的兴趣,有助于培养学生积极的情感态度和价值观。

参考文献:

- [1] 教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] M. Kline. Logic versus pedagogy [J]. American Mathematical Monthly, 1970, 77(3): 264-282.
- [3] F. Cajori. A History of Mathematics [M]. New York: The Macmillan Company, 1926: 2-3.
- [4] H. Freudenthal. Major problems of mathematics education [J]. Educational Studies in Mathematics, 1981(5): 133-150.
- [5] 覃淋,姚芳. 数学史与数学教育研究现状及展望 [J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2018,39(3): 9-15.
- [6] 卡茨. 数学史通论 [M]. 北京:高等教育出版社,2004.
- [7] 欧几里得. 几何原本 [M]. 南京:译林出版社,2014.
- [8] 郭世荣. 算法统宗导读 [M]. 武汉:湖北教育出版社,2000.
- [9] A. N. Singh. On the use of series in Hindu mathematics [J]. Osiris, 1936: 606-628.
- [10] 婆什伽罗. 莉拉沃蒂 [M]. 北京:科学出版社,2008.
- [11] O. Terquem. Notice sur un manuscrit H é breu du trait é tique d' Ibn Esra, conserve a la biblioth è que royale [J]. Journal de Mathematiques Pures et Appliqu é es, 1841(6): 275-296.
- [12] C. Clavius. Epitome Arithneticae Practicae [M]. Romae: Typographia Dominici Basae, 1583.
- [13] J. Wallis. Opera Mathematica (Vol. 1) [M]. Oxoniae: E. Theateo Sheldoniano, 1695.
- [14] L. Euler. Elements of Algebra [M]. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co, 1822.
- [15] S. F. Lacroix. É l é mens d' Alg è bre [M]. Paris: Mme Ve Courcier, 1812.
- [16] W. Wallace. Algebra. [M]// Encyclopaedia Britannica. 6th ed. Edinburgh: Archibald Constable & Company, (Vol. 1), 1823: 617-619.