子空间在变换下的补子空间和正交补的研究

张伟聪

海南工商职业学院

摘　要：直和在线性空间和欧氏空间中是很重要的一个概念，线性空间的补子空间和欧式空间的正交补空间在变换的作用下唯一性如何，本文对这一方面进行研究，得出了补子空间在可逆线性变换下不唯一，正交补空间在正交变换下具有唯一性。

关键词：线性变换；正交变换；唯一性

线性空间与欧氏空间中的子空间理论一直是高等代数的重要研究领域，尤其是在可逆线性变换与正交变换下，补子空间与正交补空间的特性分析更是具有重要的理论与实践意义。前人对这一领域做了大量研究，为后续深入探索提供了坚实的基础。例如，史江涛和王燕（2024）在研究子空间的并集性质时，给出了群的表示条件，这为子空间的结构特性提供了新的视角。此外，任芳国和王甜甜（2024）针对矩阵多项式的 Jordan 标准形进行了刻画，通过分析矩阵的相似关系与秩，丰富了矩阵理论的内涵。

另一方面，关于特定变换的性质，刘兰冬等（2024）提出了计算 Householder 变换行列式的多种方法，这不仅深化了对线性代数中正交变换的理解，也为实践中灵活运用线性变换提供了新的思路。这些研究成果表明，在线性代数领域，子空间在变换下的性质分析已成为当前学术界的重要研究方向。然而，现有文献多集中于单一变换或特定子空间性质的探讨，对可逆线性变换与正交变换下子空间的补性及正交补空间的唯一性问题尚缺乏系统的分析。

鉴于此，本文聚焦于有限维线性空间与欧氏空间中的子空间，通过引入可逆线性变换与正交变换，探讨补子空间与正交补空间在变换下的唯一性问题。在此基础上，本文不仅进一步完善了补子空间与正交补空间在不同变换下的相关理论，而且为后续关于不变子空间的研究提供了新的方向与启示。通过结合已有文献成果与理论分析，本文旨在推动这一领域研究的深入发展。

1　线性空间子空间在可逆线性变换作用下的补子空间

可逆线性变换，设 V 是数域 P 上的线性空间，σ 是 V 的线性变换，如果存在变换 τ，使得 στ=τσ=I，其中 I 为单位变换，那么称 τ 为可逆线性变换，记为 σ^{-1}。

命题：设 T 是 n 维线性空间 V 的一个可逆线性变换，V_1,V_2 是 V 的子空间，并且有 $V=V_1\oplus V_2$，求证：$V=\mathrm{T}V_1\oplus \mathrm{T}V_2$，且 $\mathrm{T}V_1$ 的补子空间不唯一。

证明：因为 $V=V_1\oplus V_2$，所以我们可设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r$ 为 V_1 的一组基，$\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\alpha_n$ 为 V_2 的一组基，并把两组基合并起来得到 V 的一组基，即有 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r)$，$V_2=L(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\alpha_n)$，$V=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n)$。

下证：$\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n}$ 也是 V 的一组基。

因 V 是 n 维的线性空间，所以只需证明 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n}$ 线性无关即可，

设 $k_1\mathrm{T}\alpha_1+k_2\mathrm{T}\alpha_2+\cdots\cdots+k_n\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n}=0$，由于 T 可逆，故 $\mathrm{T}^{-1}(k_1\mathrm{T}\alpha_1+k_2\mathrm{T}\alpha_2+\cdots\cdots+k_n\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n})=\mathrm{T}^{-1}(0)$，从而有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_n\alpha_\mathrm{n}=0$，又因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_\mathrm{n}$ 线性无关，所以 $k_i=0,i=1,2,\cdots\cdots,n$。

所以 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n}$ 也是 V 的一组基，即有 $V=L(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n})$。

因为 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r)$，$\mathrm{T}V_1=L\mathrm{T}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r)=L(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_r)$，$V_2=L(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\alpha_n)$，$\mathrm{T}V_2=L\mathrm{T}(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\alpha_n)=L(\mathrm{T}\alpha_{r+1},\mathrm{T}\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n)$，又因为 $V=L\mathrm{T}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n)=L(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n})$，$\mathrm{L}(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n)=L(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_r)\oplus L(\mathrm{T}\alpha_{r+1},\mathrm{T}\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n)$，所以 $V=\mathrm{T}V_1\oplus \mathrm{T}V_2$。

下面证明：$\mathrm{T}V_1$ 的补子空间不唯一。

对于上述的 V_1，我们取 $V_3=L(\alpha_1+\alpha_{r+1},\cdots\cdots,\alpha_{r+2},\alpha_n)$，有 $V=V_1\oplus V_3$，因 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n}$ 也是 V 的一组基，即有 $V=L(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_\mathrm{n})$，因为 $\dim\mathrm{T}V_1+\dim\mathrm{T}V_3=r+n-r-1+1=n=\dim V$，且 $\mathrm{T}V_1+\mathrm{T}V_3\subseteq V$，所以有 $\mathrm{T}V_1+\mathrm{T}V_3=V$。

对 $\forall\alpha\in\mathrm{T}V_1\cap\mathrm{T}V_3$，则有 $\alpha\in\mathrm{T}V_1$，$\alpha\in\mathrm{T}V_3$，又 $\mathrm{TV1}=L\mathrm{T}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r)=L(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_r)$，$\mathrm{T}V_3=L\mathrm{T}(\alpha+\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\alpha_n)=L(\mathrm{T}(\alpha+\alpha_{r+1}),\mathrm{T}\alpha_{r+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n)$，所以 $\alpha=k_1\mathrm{T}\alpha_1+k_2\mathrm{T}\alpha_2+\cdots\cdots+k_r\mathrm{T}\alpha_r$，$\alpha=k_{r+1}(\mathrm{T}\alpha_1+\mathrm{T}\alpha_{r+1})+k_{r+2}\mathrm{T}\alpha_{r+2}\cdots\cdots+k_n\mathrm{T}\alpha_n$，即有 $\mathrm{T}[(k_1-k_{r+1})\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_r\alpha_r-k_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots\cdots-k_n\alpha_n]=0$，因 T 可逆，所以 $(k_1-k_{r+1})\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots\cdots+k_r\alpha_r-k_{r+1}\alpha_{r+1}-\cdots\cdots-k_n\alpha_n=0$。

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_r$ 线性无关，从而得到 $k_i=0,i=1,2,\cdots\cdots$，n，所以 $\alpha=0,\mathrm{T}V_1\cap\mathrm{T}V_3=\{0\}$。

故有 $V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_3$，而 $\mathrm{T}V_2\neq\mathrm{T}V_3$，即有 $\mathrm{T}V_1$ 的补子空间不唯一。

或者，令 $l_1\mathrm{T}\alpha_1+l_2\mathrm{T}\alpha_2+\cdots+l_r\mathrm{T}\alpha_r+l_{r+1}\mathrm{T}(\alpha_1+\alpha_{r+1})+l_{r+2}\mathrm{T}\alpha_{r+2}+\cdots+l_n\mathrm{T}\alpha_n=0$

故有 $(l_1+l_{r+1})\mathrm{T}\alpha_1+l_2\mathrm{T}\alpha_2+\cdots+l_n\mathrm{T}\alpha_n=0$。

因为 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n$ 也是 V 的一组基，即有 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n$ 线性无关，所以 $l_1=l_2=\cdots\cdots=l_n=0$，

所以 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_r,\mathrm{T}\alpha_{r+1},\mathrm{T}\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n$ 线性无关，即也是 V 的一组基。

所以 $\mathrm{T}V_3=L\mathrm{T}(\alpha+\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\alpha_n)$ 也是 $\mathrm{T}V_1$ 的补子空间，即 $\mathrm{T}V_1$ 的补子空间不唯一。

或者：令 $l_1\mathrm{T}\alpha_1+l_2\mathrm{T}\alpha_2+\cdots+l_r\mathrm{T}\alpha_r+l_{r+1}\mathrm{T}(\alpha_1+\alpha_{r+1})+l_{r+2}\mathrm{T}\alpha_{r+2}+\cdots+l_n\mathrm{T}\alpha_n=0$，故有 $(l_1+l_{r+1})\mathrm{T}\alpha_1+l_2\mathrm{T}\alpha_2+\cdots+l_n\mathrm{T}\alpha_n=0$。

因为 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n$ 线性无关，所以 $l_1=l_2=\cdots\cdots=l_n=0$。

所以 $\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_2,\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_r,\mathrm{T}\alpha_{r+1},\mathrm{T}\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\mathrm{T}\alpha_n$ 线性无关，即也是 V 的一组基。

所以 $\mathrm{T}V_3=L\mathrm{T}(\alpha+\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots\cdots,\alpha_n)$ 也是 $\mathrm{T}V_1$ 的补子空间。

又因 $\mathrm{T}V_2\neq\mathrm{T}V_3$，从而得到 $\mathrm{T}V_1$ 的补子空间不唯一。

2 欧氏空间子空间在正交变换下的正交补

在高等代数中，正交变换是欧氏空间很重要的一种线性变换，它从实内积空间 V 映射到 V，并且能够保持变换前后内积不变的性质。

设 T 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，如果 $\forall\alpha\in W$，则称 W 是 T 的不变子空间，简称 T– 子空间。

命题：设 T 是 n 维欧氏空间 V 的一个正交变换，V_1 是 T 的不变子空间，并且有 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$，求证：有 $V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_1^{\perp}$，并且 $\mathrm{T}V_1$ 的正交补唯一。

证明：我们分别取 V_1 与 $V_1^{\perp}$ 的标准正交基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\cdots,\varepsilon_m$ 和 $\varepsilon_{m+1},\varepsilon_{m+2},\cdots\cdots,\varepsilon_n$。

因为 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$，所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\cdots,\varepsilon_n$ 也是 V 的一组标准正交基。

而 T 是正交变换，所以 $\mathrm{T}\varepsilon_1,\mathrm{T}\varepsilon_2\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组标准正交基，即有 $V=L(\mathrm{T}\varepsilon_1,\mathrm{T}\varepsilon_2\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$。

由于 V_1 是 T 的不变子空间，

则有 $\mathrm{T}\varepsilon_1,\mathrm{T}\varepsilon_2\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_m$ 是 V_1 的一组基，即有 $V_1=L(\mathrm{T}\varepsilon_1,\mathrm{T}\varepsilon_2\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_m)$。

下面证明：$V_1^{\perp}=L(\mathrm{T}\varepsilon_{m+1},\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$。

对 $\forall\alpha\in L(\mathrm{T}\varepsilon_{m+1},\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$，有 $\alpha=k_{m+1}\mathrm{T}\varepsilon_{m+1}+\cdots+k_n\mathrm{T}\varepsilon_n=\mathrm{T}(k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n)$，

对 $\forall\beta\in V_1$，有 $\beta=\mathrm{T}(k_1\varepsilon_1+\cdots+k_m\varepsilon_m)$，

因为 $\mathrm{T}\varepsilon_1,\mathrm{T}\varepsilon_2\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n$ 也是 V 的一组标准正交基，即有 $(\mathrm{T}\varepsilon_i,\mathrm{T}\varepsilon_j)=0,\ i\neq j$。

所以，$(\alpha,\beta)=[\mathrm{T}(k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots\cdots+k_n\varepsilon_n),\mathrm{T}(k_1\varepsilon_1+\cdots\cdots+k_m\varepsilon_m)]=0$

故 $\alpha\in V_1^{\perp}$，即有 $V_1^{\perp}\supseteq L(\mathrm{T}\varepsilon_{m+1},\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$。

下证 $V_1^{\perp}\subseteq L(\mathrm{T}\varepsilon_{m+1},\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$。

$\forall\delta\in V_1^{\perp}$，有 $\delta=l_1\mathrm{T}\varepsilon_1,l_2\mathrm{T}\varepsilon_2\cdots\cdots,l_n\mathrm{T}\varepsilon_n$，且对 $\mathrm{T}\varepsilon_i\in V_1,i=1,2,\cdots,m$，

有 $0=(\mathrm{T}\varepsilon_i,\delta)=l_i(\mathrm{T}\varepsilon_i,\mathrm{T}\varepsilon_i)$，所以 $l_i=0,\ i=1,2,\cdots,m$。

所以 $\delta=l_{m+1}\mathrm{T}\varepsilon_{m+1}+l_{m+2}\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}+\cdots+l_n\mathrm{T}\varepsilon_n\in L(\mathrm{T}\varepsilon_{m+1},\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$，从而有 $V_1^{\perp}\subseteq L(\mathrm{T}\varepsilon_{m+1},\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$，综上有 $V_1^{\perp}=L(\mathrm{T}\varepsilon_{m+1},\mathrm{T}\varepsilon_{m+2}\cdots\cdots,\mathrm{T}\varepsilon_n)$。

所以 $V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_1^{\perp}$。

唯一性的证明：我们不妨设 $\mathrm{T}V_2,\mathrm{T}V_3$ 都是 $\mathrm{T}V_1$ 的正交补，于是有 $V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_2$，$V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_3$。

令 $\mathrm{T}\alpha\in\mathrm{T}V_2$，由 $V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_3$ 有 $\mathrm{T}\alpha=\mathrm{T}\alpha_1+\mathrm{T}\alpha_3$，其中 $\mathrm{T}\alpha_1\in\mathrm{T}V_1$，$\mathrm{T}\alpha_3\in\mathrm{T}V_3$。

又因为 $V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_2$，所以 $\mathrm{T}\alpha\perp\mathrm{T}\alpha_1$。

从而有 $0=(\mathrm{T}\alpha,\mathrm{T}\alpha_1)=(\mathrm{T}\alpha_1+\mathrm{T}\alpha_3,\mathrm{T}\alpha_1)=(\mathrm{T}\alpha_1,\mathrm{T}\alpha_1)$，可得到 $\mathrm{T}\alpha_1=0$。

故有 $\mathrm{T}\alpha_1\in\mathrm{T}V_3\Rightarrow\mathrm{T}V_2\in\mathrm{T}V_3$。

同理有：$\mathrm{T}V_2\supseteq\mathrm{T}V_3$。

所以 $\mathrm{T}V_2=\mathrm{T}V_3$，即 $\mathrm{T}V_1$ 的正交补唯一。

3 总结与展望

T 是有限维线性空间 V 的可逆线性变换，$V=V_1\oplus V_2$，$V_1,V_2\subseteq V$，则有 $V=\mathrm{T}V_1\oplus\mathrm{T}V_2$，且 $\mathrm{T}V_2$ 不唯一。

T 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换，且 V_1 是 T– 子空间，$V=V_1\oplus V_2$，则 $\mathrm{T}V_1$ 的正交补空间唯一。

在变换之下引出的不变子空间，线性空间和欧氏空间是否能分解为若干不变子空间的直和，这些不变子空间在形状上又有什么样的特征、区别，是笔者接下来研究的内容。

参考文献：

[1] 史江涛，王燕．关于线性子空间的并集的一个注记 [J]. 高等数学研究 ,2024,27(01):1−2+15.

[2] 任芳国，王甜甜．关于矩阵多项式 Jordan 标准形刻画 [J]. 高等数学研究 ,2024,27(01):18−21+117.

[3] 刘兰冬，刘心怡，郭新宇．计算 Householder 变换之行列式的六种解法 [J]. 高等数学研究 ,2024,27(01): 72−73+126.

[4] 钱吉林．高等代数题解精粹 [M]. 北京：中央民族大学出版社，2009.

[5] 丘维声 . 高等代数（第二版）下册 [M]. 北京：高等教育出版社，2003.
[6] 杨子胥 . 高等代数精选题解 [M]. 北京：高等教育出版社，2009.
[7] 张力宏 , 刘鹏飞 . 欧氏空间子空间正交补的代数方法研究 [J]. 大学数学 ,2009,25(03):190−192.
[8] 张贤科，许甫华 . 高等代数学（第二版）[M]. 北京：清华大学出版社，2004.